

経済数理基礎：中間試験問題（80分）

2000年11月22日 法政大学 経済学部 鈴木 豊

- 1、兄と弟の二人が、親から相続したある地方都市の駅前の土地を競売にかけるとの判断で一致している。2人は土地が20億円で売れるか（状態1）10億円で売れるか（状態2）5分5分であるとの判断で一致している。自分の取り分をX億円とする時、兄の効用関数は $-\frac{1}{X+1}$ 、

弟の効用関数は $\sqrt{X+1}$ で与えられるものとする。

- (1) 2人の危険に対する態度を述べなさい。
 (2) 2人が販売収益を折半するという契約から、それぞれはいくらの期待効用を得るか？また、それぞれの確実性同値額はいくらか。
 (3) 2人の絶対的リスク回避度を求め、どちらがよりリスク回避的であるか判定せよ。(2)との関連も簡単にコメントせよ。
 (4) (2)の契約よりも、2人にとってより満足のいく（パレート改善的な）分配ルールを1つ具体的に述べよ。その際、そのルールが満たすべき条件を明示すること。
 (5) エッジワースのボックス・ダイアグラムを使って(1)から(4)の状況を図示せよ。その際、(2)または(3)で得られた事実も反映させること。

- 2、将来起こりうる状態 θ_j （その確率 $P(\theta_j)$ ）のもとで、事業部長が行動（努力水準の高さ） e_i

を選択する時の収入 R_{ij} が次の表のようであるとする。収入 R はまず経営者に帰属し、事業部長にはその働きに応じて報酬 W が払われる。経営者はリスク中立的で、残余利益から効用 $R-W$ を得るとし、一方、事業部長の効用関数は $U(W, e) = 2\sqrt{W} - (e-1)$ であるとする。彼は他の場所で働くと1の効用を得ることが出来る。また、事業部長がその努力水準を選ぶときには、どの状態が生じるか、その分布しか知らないとする。（言い換えると、努力水準を選んだ後で、いずれかの状態 θ_j が生起する。）

$e_i \setminus \theta_j$	θ_1	θ_2	θ_3
$e_1 = 1$	10	10	30
$e_2 = 2$	10	30	30
$P(\theta_j)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

- (1) 経営者が事業部長の努力水準を観察できるならば、どのように報酬体系を設計したらよいか。経営者の立場から定式化し、事業部長への報酬額と経営者の期待利潤を求めよ。
 (2) 事業部長の行使した努力水準を観察できないために、経営者は、事業部長が達成した実績（事業から生まれた収入の水準 R ）に基づいて報酬を支払う契約を設計する。よって、経営者が提示する契約は $\{W(10), W(30)\}$ となろう。このとき、事業部長が $e_2 = 2$ を自

発的に選ぶために（事業部長に $e_2 = 2$ を自発的に選ばせるために）、上の契約が満たすべき条件式を書け。また、その意味を言葉で簡潔に述べよ。

- (3) 事業部長の参加条件を書け。
- (4) 経営者にとって最適な報酬体系を求めるにはいかなる数学的問題を解かねばならないかを定式化したうえで、実際に解け。事業部長の達成業績別の報酬額 $\{W(10), W(30)\}$ と、その際の経営者の期待最大利潤を求めればよい。
- (5) この数値例においては、経営者の期待利潤は最善（ファーストベスト）のケースの（ア）よりも小さくなることがわかる。その減少分は、「期待賃金支払いの差」として現れ、その額は（イ）である。これは、最適努力 $e_2 = 2$ を引き出す際に、事業部長に負わせるリスクを補償してやることによる経営者にとっての余分なコストであり、（ウ）と呼ばれる。（ア）から（ウ）を埋めよ。

3、次の二問のうち、1問を選んで答えよ。

- (A) 年商（ S ）の企業の株式時価（ X ）の変化は、 $X = f(S) + S^{1-a}e + S\varepsilon$ に等しい。ここで e は CEO（最高経営責任者）が投じた努力、 ε は制御不可能な不確定要因の影響に基づく収入の変化、そして $f(S)$ は企業規模の関数である。経営者報酬の適正な形態および水準をめぐっての重要な論争の一つは、経営者が大組織の業績にどれだけの効果を与えうるかについての議論である。このモデルでは、この効果はパラメータ a で示される。

$a = 0$ のとき、経営者の努力のインパクトは組織の規模：年商（ S ）に比例し、 $a = 1$ のとき、インパクトは組織の規模とは無関係に定まる。 a がその中間にあるとき、経営者が利益に影響を与える能力は、組織の規模が 1 % 成長するごとに、ほぼ a % 成長する。

授業で解説した「ミルグロム + ロバーツ（原論文はホルムストロム + ミルグロム）モデル」を使って、経営者 CEO の収入 W が、会社の収入（ X ）とともに増加する最適比率を求めたい。

ただし、CEO の努力に要するコストは $C(e) = \frac{1}{2}e^2$ と仮定し、また彼（彼女）はリスク

回避的であるとする。

- (1) 問題文の の部分の主張を「弾力性（elasticity）」の概念を利用して確かめよ。
- (2) CEO の報酬関数を収入 X の線形関数として、 $W(X) = \beta X + \gamma$ とおく。
ここで、 β は CEO の収入 W が会社の収入 X とともに増加する比率であり、歩合またはインセンティブ強度に相当するものである。 γ は X とは無関係の基本給の部分である。まず、 の下で、経営者が e の努力を投じたときに得る確実性同値額を求めよ。
- (3) このとき、経営者の確実性同値額を最大化する努力水準の満たすべき 1 階条件を求めよ。これはインセンティブ制約（誘因制約）に相当するものである。
- (4) この「エージェンシー問題」を解いて、最適比率 β^* を求めよ。
- (5) S （企業規模）が大きい場合、最適比率 β^* は a にどのように依存するか？

(B) パソコン、テレビなどの製品の品質保証(**Product Warranty**)の問題を考える。製品は、正常に機能すれば Z の便益を消費者にもたらす(これは共有知識である)が、故障(欠陥)も生じうる。正常に機能する確率(成功確率) π は、製造業者が提供する製品の品質 q 、流通業者の品質管理努力 s の両方に依存するものとし、 $\pi(q, s)$ と書け、 $\frac{\partial \pi}{\partial q} > 0, \frac{\partial \pi}{\partial s} > 0$, および

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q^2} < 0, \frac{\partial^2 \pi}{\partial s^2} < 0 \text{ を満たすとする。また、} q \text{ と } s \text{ を供給するときのコストは } C(q), D(s) \text{ であ}$$

るとし、 $C', C'', D', D'' > 0, \forall q, s \geq 0$ を満たすとする。製造業者が流通業者に製品を出荷するときの流通業者の支払い(Payment)は P_p 、流通業者が消費者に販売する時の消費者の支払い(最終価格)は P_d であるとする。この下で、製品に事故(欠陥)が生じたときは、製品の消費者にとっての価値 Z のうち、 w_p の割合を製造業者が、 w_d の割合を流通業者が(消費者に対して)損失補償するという製造物保証(Product Warranty)のルールを考える。ただし、 $0 \leq w_p, w_d \leq 1$ を満たすものとする。

(1) 製造業者、流通業者の期待ペイオフ関数 V_p, V_d を書け。

ヒント：消費者の期待ペイオフ関数は $V_c = \pi Z + (1 - \pi)(w_p + w_d)Z - P_d$ である。

- (2) ファーストベスト解が満たすべき1階条件を記述せよ。
- (3) 問題文の製造物保証(Product Warranty)ルールのもとで、製造業者と流通業者が非協力的に行動するときの「ナッシュ均衡」を特徴付ける1階条件を記述せよ。
- (4) w_p, w_d が $w_p + w_d = 1$ を満たすと仮定すると、(3)の状況ではいかなる結果が生じるか。また、この条件は「チーム生産理論」の何と呼ばれる条件に相当するか。
- (5) (2)のファーストベスト解をナッシュ均衡として達成するには、品質保証ルール(ここでの損失補償ルール)は理論的にいかなる条件を満たす必要があるか。
- (6) (5)のルールの問題点を、(4)との関連に留意しつつ、消費者モラルハザードという言葉を用いて一回は使って簡潔に述べよ。